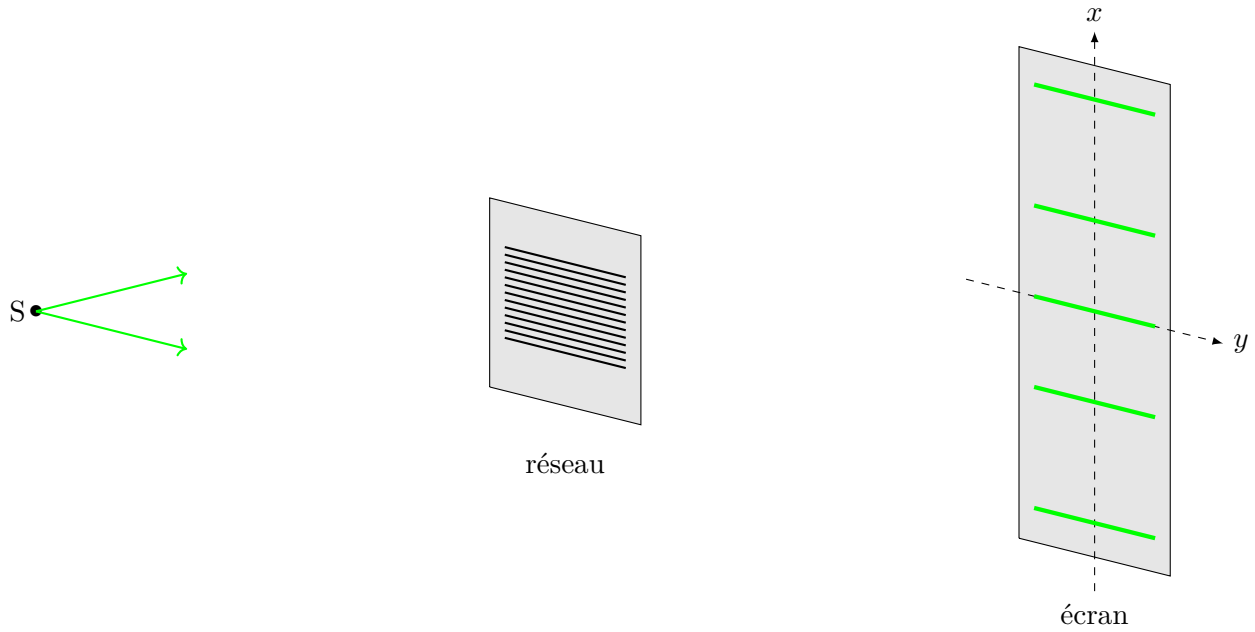
Optique – Chapitre 4

Superposition de N ondes lumineuses

I. Étude d'un réseau par transmission 1
I.1. Définition et cadre de l'étude 1
I.2. Formule des réseaux 2
I.3. Expression de l'intensité lumineuse 4
II. Application à la spectroscopie 5
II.1. Réseau éclairé par une lumière monochromatique 5
II.2. Réseau éclairé par une lumière polychromatique 6

Nous avons vu précédemment des dispositifs permettant de faire interférer deux ondes lumineuses entre elles. Il existe cependant d'autres dispositifs permettant de faire interférer de très nombreuses ondes lumineuses entre elles, on parle alors d'**interférences à N ondes**.

Au cours de ce chapitre, nous allons principalement considérer l'expérience ci-dessous, où un réseau constitué de nombreuses fentes fines parallèles est éclairé par une source lumineuse monochromatique située à grande distance.



On observe plusieurs franges brillantes bien espacées sur un écran situé à grande distance, qui sont dues aux interférences entre les N ondes qui passent par les fentes.

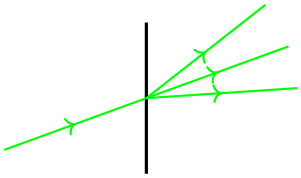
I. Étude d'un réseau par transmission

I.1. Définition et cadre de l'étude

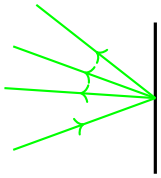
Un **réseau** est une surface constituée d'un motif qui se répète un très grand nombre de fois avec un espacement régulier.

On peut distinguer deux types de réseaux :

- les **réseaux par transmission** qui laissent passer la lumière et produisent des interférences en sortie ;
- les **réseaux par réflexion** qui réfléchissent la lumière et produisent des interférences du même coté que la source lumineuse.

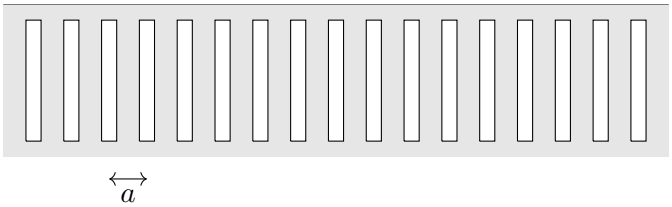


réseau par transmission



réseau par réflexion

Dans la suite du chapitre, on se limite à l'étude d'un réseau par transmission constitué de N fentes fines parallèles à la direction (Oy), avec $N \gg 1$. Le **pas du réseau**, noté a, correspond à la distance entre deux fentes successives.



En pratique, un réseau comme celui-ci est plus souvent décrit par son nombre n_0 de « traits » par millimètre, que par son pas a.

Application :

Déterminons le pas d'un réseau constitué de $n_0 = 400$ traits par millimètre.

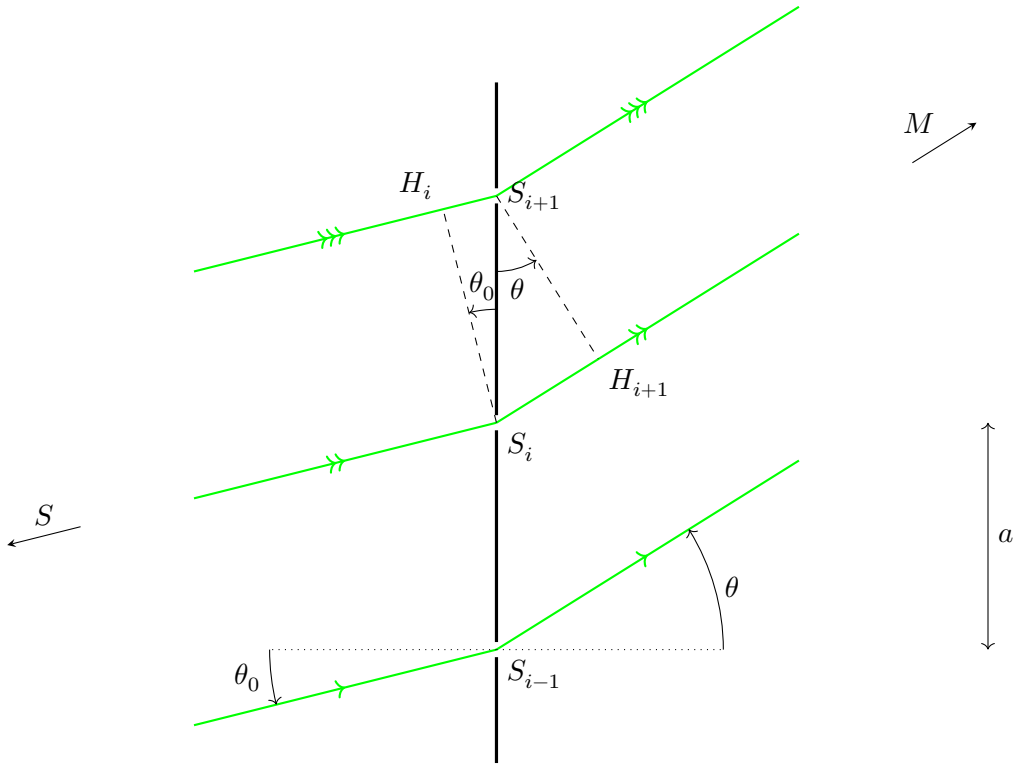
Le pas du réseau est : $a = \dfrac{1}{n_0} = \dfrac{1}{400.10^3} = 2{,}50.10^{-6}\,\text{m} = 2{,}50\,\mu\text{m}.$

On suppose que le réseau étudié est éclairé dans l'air d'indice optique $n = 1$ sous un angle d'incidence θ_0 par une source lumineuse monochromatique S située à l'infini. En pratique, on peut placer une source lumineuse ponctuelle dans le plan focal objet d'une lentille pour obtenir cet éclairage parallèle.

Les interférences en sortie du réseau sont observées sur une écran situé à l'infini. En pratique, on peut placer un écran dans le plan focal image d'une lentille pour observer la figure d'interférences.

I.2. Formule des réseaux

Le calcul de l'intensité lumineuse $I(M)$ qui résulte de la superposition des N ondes lumineuses est assez complexe. Plutôt que de le réaliser, nous allons simplement déterminer les directions θ en sortie du réseau pour lesquelles les interférences sont constructives, et forment donc des franges brillantes sur l'écran.



Pour cela, on commence par exprimer la différence de marche δ entre deux rayons lumineux qui passent par des fentes successives S_i et S_{i+1}. En notant H_i et H_{i+1} les projetés orthogonaux des fentes, on peut exprimer :

$$\delta = (SS_iM) - (SS_{i+1}M) = [(SS_i) + (S_iH_{i+1}) + (H_{i+1}M)] - [(SH_i) + (H_iS_{i+1}) + (S_{i+1}M)]\,.$$

La source lumineuse S étant située à l'infini, l'onde est plane avant le réseau, et on en déduit que les points S_i et H_i sont sur une même surface d'onde d'après le théorème de Malus, ainsi :

$$(SS_i) = (SH_i)\,.$$

L'écran étant situé à l'infini, l'onde est plane après le réseau, et on en déduit que les points S_{i+1} et H_{i+1} sont sur une même surface d'onde d'après le théorème de Malus, ainsi :

$$(S_{i+1}M) = (H_{i+1}M)\,.$$

On obtient alors :

$$\delta = (S_iH_{i+1}) - (H_iS_{i+1}) = S_iH_{i+1} - H_iS_{i+1}.$$

Pour exprimer ces distances géométriques, on peut remarquer que :

- pour le triangle $H_iS_iS_{i+1}$: $\sin\theta_0 = \dfrac{H_iS_{i+1}}{S_iS_{i+1}} = \dfrac{H_iS_{i+1}}{a}$, d'où : $H_iS_{i+1} = a\sin\theta_0$;
- pour le triangle $H_{i+1}S_{i+1}S_i$: $\sin\theta = \dfrac{S_iH_{i+1}}{S_iS_{i+1}} = \dfrac{S_iH_{i+1}}{a}$, d'où : $S_iH_{i+1} = a\sin\theta$;

d'où finalement :

$$\delta = a\,(\sin\theta - \sin\theta_0)\,.$$

On peut en déduire l'expression de l'ordre d'interférences :

$$p = \frac{\Delta\phi}{2\,\pi} = \frac{1}{2\,\pi}\,\frac{2\,\pi\,\delta}{\lambda_0} = \frac{a\,(\sin\theta - \sin\theta_0)}{\lambda_0}.$$

On a vu précédemment que des interférences entre deux ondes sont constructives si l'ordre d'interférences p est entier, d'où on en déduit que les directions θ_p en sortie du réseau où les interférences entre ces deux ondes sont constructives vérifient la relation :

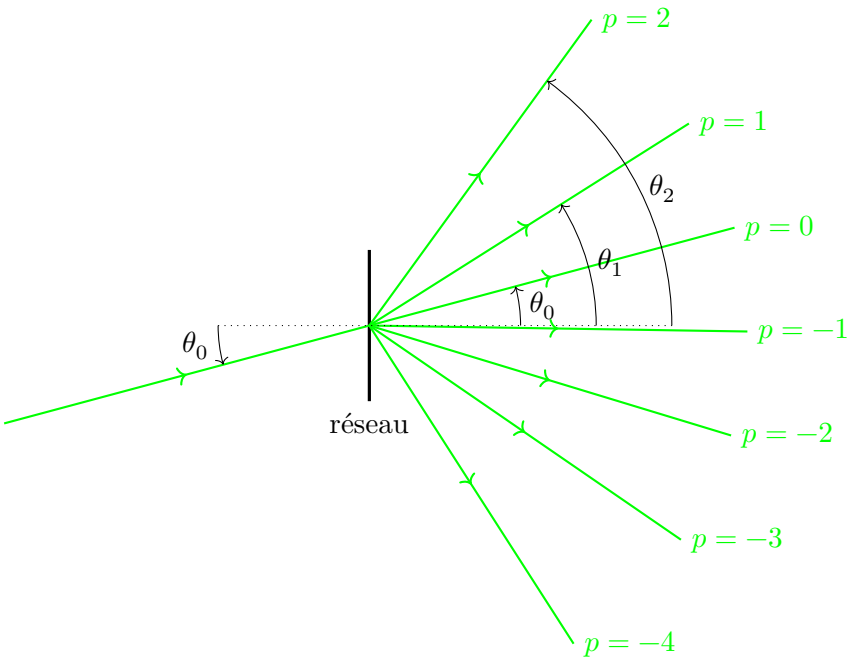
$$\sin\theta_p - \sin\theta_0 = \frac{p\,\lambda_0}{a}$$

avec $p \in \mathbb{Z}$.

En appliquant ce raisonnement entre chaque paire de fentes successives du réseau, on en conclut que les directions θ_p en sortie du réseau où les interférences entre les N ondes sont constructives vérifient la **formule des réseaux** :

$$\boxed{\sin\theta_p - \sin\theta_0 = \frac{p\,\lambda_0}{a} \qquad \text{avec } p \in \mathbb{Z}}\,.$$

En déterminant θ_p pour chaque ordre d'interférences p entier, on peut représenter les rayons lumineux en sortie du réseau qui donnent des franges brillantes sur l'écran :



Comme $-1 \leqslant \sin\theta_p \leqslant 1$, le nombre de ces rayons lumineux est limité.

On remarque également que le rayon lumineux correspondant à l'ordre d'interférences $p = 0$ présente une direction $\theta_p = \theta_0$ en sortie, il n'est donc pas dévié par le réseau.

I.3. Expression de l'intensité lumineuse

On peut montrer que l'intensité lumineuse qui résulte de la superposition des N ondes lumineuses peut s'exprimer en fonction de la direction θ en sortie du réseau telle que :

$$I(\theta) = I_0\,\frac{\sin^2\left[\frac{N\,\pi\,a}{\lambda_0}\,(\sin\theta - \sin\theta_0)\right]}{\sin^2\left[\frac{\pi\,a}{\lambda_0}\,(\sin\theta - \sin\theta_0)\right]}$$

avec I_0 l'intensité lumineuse due à chaque source.

Cette expression est en accord avec la formule des réseaux obtenue précédemment, puisque les directions θ_p en sortie du réseau correspondent au maximum de l'intensité lumineuse qui s'exprime :

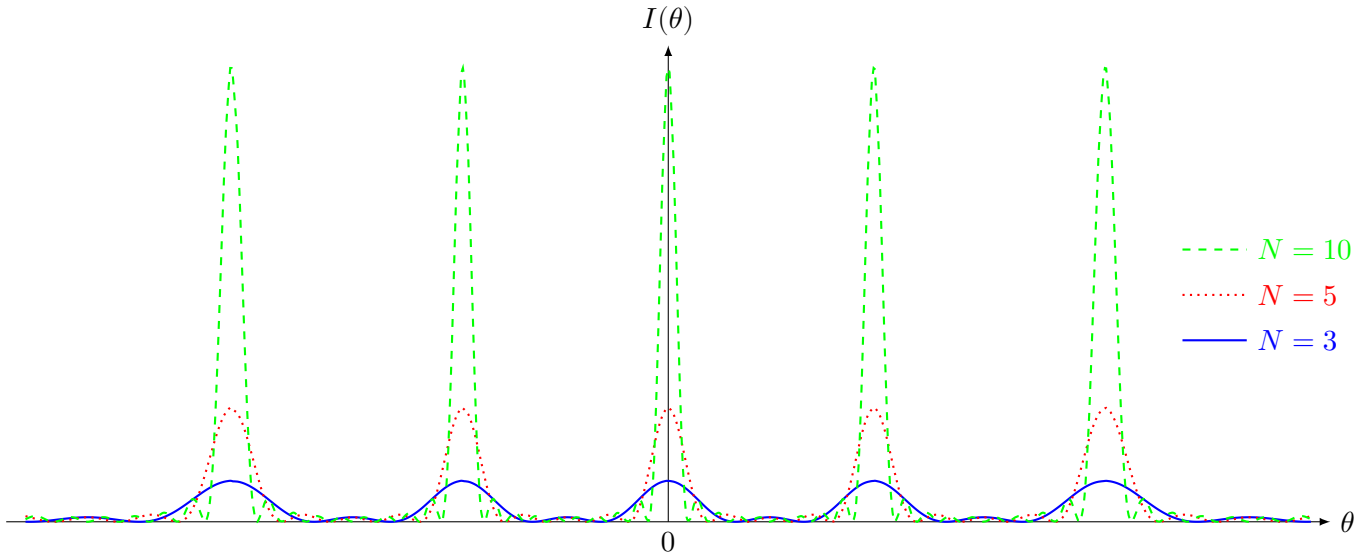
$$I_{\max} = I_0\,\frac{\sin^2\left[\frac{N\,\pi\,a}{\lambda_0}\,(\sin\theta_p - \sin\theta_0)\right]}{\sin^2\left[\frac{\pi\,a}{\lambda_0}\,(\sin\theta_p - \sin\theta_0)\right]} = I_0\left[\frac{\sin(N\,\pi\,p)}{\sin(\pi\,p)}\right]^2$$

avec la forme indéterminée en mathématiques $\dfrac{\sin(N\,\pi\,p)}{\sin(\pi\,p)} \to N$ lorsque $p \in \mathbb{Z}$, soit :

$$I_{\max} = I_0\,N^2$$

cette intensité maximale est donc d'autant plus forte que N est grand.

À titre de comparaison, on représente ci-dessous l'intensité lumineuse $I(\theta)$ pour différentes valeurs de N dans le cas où $\theta_0 = 0$:



Comme N est très grand pour les réseaux utilisés lors des applications, on en déduit que les franges brillantes observées sur l'écran sont très fines et très lumineuses.

II. Application à la spectroscopie

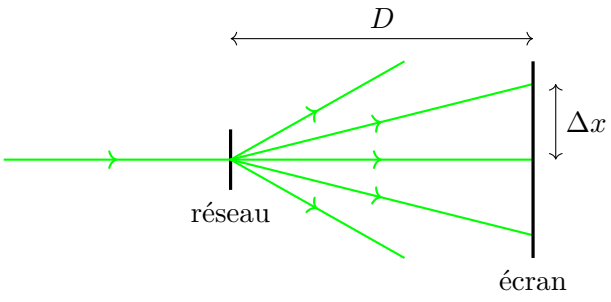
II.1. Réseau éclairé par une lumière monochromatique

Comme la formule des réseaux relie les directions θ_p des rayons lumineux en sortie du réseau et la longueur d'onde λ_0, on peut utiliser un réseau dont le pas a est connu pour mesurer la longueur d'onde d'une source lumineuse monochromatique : il permet donc de réaliser de la **spectroscopie**.

À l'inverse, on peut également mesurer le pas d'un réseau si la longueur d'onde d'une source lumineuse monochromatique est connue.

Application :

Un réseau comportant $n_0 = 400$ traits par millimètre est éclairé sous une incidence normale par un laser hélium-néon. La figure d'interférences observée sur un écran situé à une grande distance $D = 1{,}00\,\text{m}$ présente des franges lumineuses à une distance $\Delta x = \pm 26{,}2\,\text{cm}$ de l'axe optique qui correspondent aux rayons lumineux les moins déviés par le réseau.



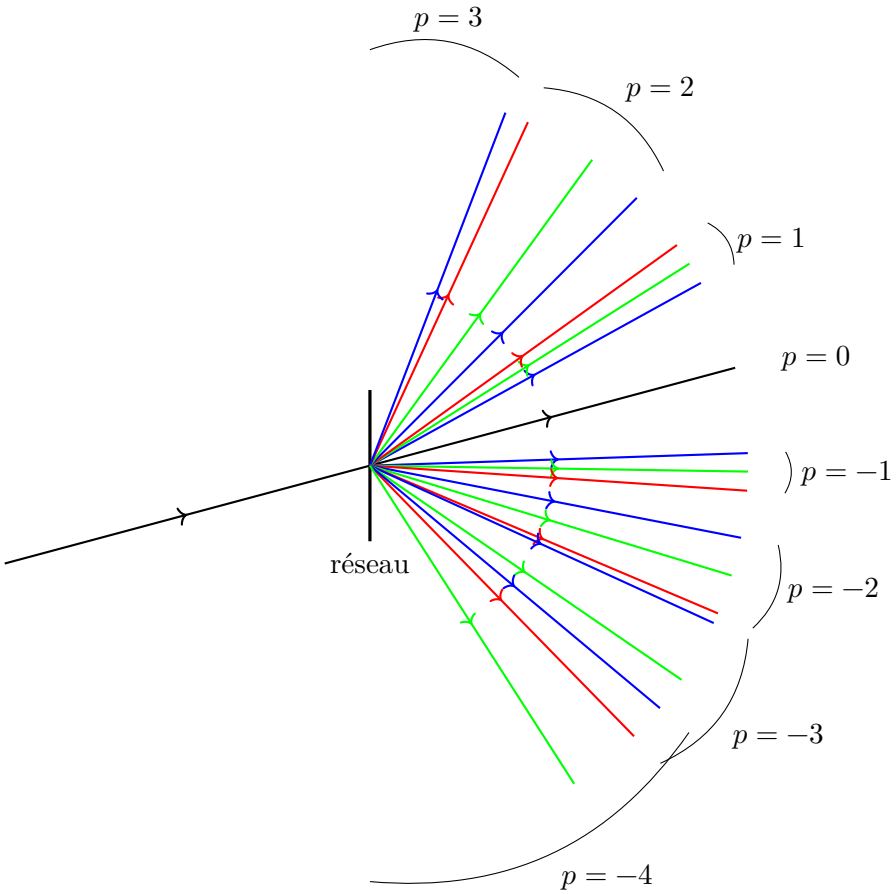
Déterminons la longueur d'onde λ_0 du laser hélium-néon.

Sous une incidence normale ($\theta_0 = 0$), la formule des réseaux donne pour le rayon lumineux d'ordre $p = 1$: $\sin\theta_1 = \dfrac{\lambda_0}{a} = \lambda_0\, n_0$, où la direction θ_1 peut s'exprimer géométriquement telle que : $\tan\theta_1 = \dfrac{\Delta x}{D}$, d'où : $\lambda_0 = \dfrac{\sin\left[\arctan\left(\frac{\Delta x}{D}\right)\right]}{n_0} = 634\,\text{nm}$.

II.2. Réseau éclairé par une lumière polychromatique

En éclairant un réseau avec une source lumineuse polychromatique, comme une source de lumière blanche par exemple, on obtient en sortie la superposition des interférences obtenues avec chaque longueur d'onde.

- Pour l'ordre d'interférences $p = 0$, la direction des rayons lumineux en sortie du réseau est $\theta_p = \theta_0$ quelle que soit la longueur d'onde λ_0, et on observe donc un faisceau polychromatique dans cette direction.
- Pour les ordres d'interférences $p \neq 0$, la direction θ_p des rayons lumineux en sortie du réseau dépend de la longueur d'onde λ_0 selon la formule des réseaux, et on observe donc la **dispersion** de la lumière polychromatique pour chaque ordre p.



Pour cet exemple, on remarque qu'un rayon d'ordre $p = -3$ est plus dévié qu'un rayon d'ordre $p = -4$, il apparait alors un **recouvrement** entre ces ordres.

Application :

Un réseau comportant $n_0 = 400$ traits par millimètre est éclairé sous une incidence normale par une lampe à vapeur atomique émettant des longueurs d'onde comprises entre $\lambda_{\text{min}} = 405\,\text{nm}$ et $\lambda_{\text{max}} = 579\,\text{nm}$.
Déterminons à partir de quel ordre on observe un recouvrement.

Sous une incidence normale ($\theta_0 = 0$), la formule des réseaux donne pour chaque longueur d'onde λ_0 : $\sin\theta_p = p\,\lambda_0\,n_0$.

Pour chaque ordre d'interférences p, la dispersion de la lumière s'étend donc de $\theta_{p,\text{min}} = \arcsin(p\,\lambda_{\text{min}}\,n_0)$ à $\theta_{p,\text{max}} = \arcsin(p\,\lambda_{\text{max}}\,n_0)$.

On obtient ainsi pour les premiers ordres :

	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
$\theta_{p,\text{min}}$	9°	19°	29°	40°
$\theta_{p,\text{max}}$	13°	28°	44°	68°

> On remarque qu'un rayon d'ordre $p = 3$ est plus dévié qu'un rayon d'ordre $p = 4$, il apparait donc un recouvrement à partir de l'ordre 3.

Le réseau n'est pas le seul système optique permettant de disperser une lumière polychromatique afin de réaliser de la spectroscopie, on pourrait également utiliser un prisme par exemple. En pratique, on utilise cependant un réseau dans la plupart des applications car la formule des réseaux permet de relier facilement la direction θ_p à la longueur d'onde λ_0, contrairement à un prisme où la relation est beaucoup plus complexe.